Modulprüfung

Systemtheorie

19. Februar 2018

Prüfer: Prof. Dr. P. Pogatzki

Bearbeitungszeit: 2 Stunden
Hilfsmittel:
Taschenrechner, Formelblatt (4 DIN A4-Seiten)

Name: Mu (Druckbuchstaben) Vorname: Lö (Druckbuchstaben)

Matr.-Nr.: 9 8 7 6 5 4

Unterschrift: Muster Lösung

Viel Erfolg!!!

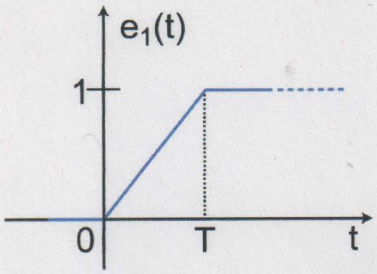
%-Punkte								
Aufgabe	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	Summe
1.								
2.								
3.								
4.								
						%-Punkte gesamt		
						Bewertungs-Punkte		
						Note		

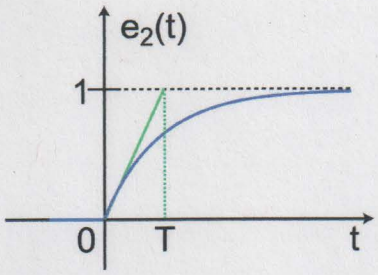
Unterschrift Prüfer:

Eingesehen am: Unterschrift:

Aufgabe 1 (26 %-Punkte)

Ein LTI-System kann im Zeitbereich durch seine Stoßantwort eindeutig beschrieben werden. In der Praxis ist die Erzeugung eines Dirac-Stoßes jedoch unmöglich. Daher wird häufig auf eine **nichtideale** Sprungantwort ausgewichen.
Zur Erzeugung eines nichtidealen Sprungs stehen zwei verschiedene Testgeneratoren zur Auswahl. Testgenerator1 erzeugt die Funktion $e_1(t)$, Testgenerator2 erzeugt hingegen $e_2(t)$ (entspricht der Sprungantwort eines TP 1. Ordnung).





Die Eigenschaften der beiden nichtidealen Testsignale sollen miteinander verglichen werden.

Aufgabe 1.1 (10 %-Punkte)

Prüfen Sie mittels Rechnung, ob für beide Testsignale $e_1(t)$ und $e_2(t)$ gilt:

$$\lim_{T\to 0}\left(\frac{d}{dt}e_1(t)\right)=\delta(t) \quad \text{und} \quad \lim_{T\to 0}\left(\frac{d}{dt}e_2(t)\right)=\delta(t)$$

a) $$\frac{de_1(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1/T & 0 < t < T \\ 0 & t \geq T \end{cases} = \frac{1}{T}\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

$$\int_0^T \frac{1}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)dt = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{T\to 0}\frac{1}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{undef.} & t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to 0}\frac{de_1(t)}{dt} = \underline{\underline{\delta(t)}}$$

b) $e_2(t) = 1 - e^{-t/T}$ (TP 1. Ordnung) $(t \geq 0)$

$$\frac{de_2(t)}{dt} = \frac{1}{T}\cdot e^{-t/T} \quad \text{für } t > 0, \text{ sonst } 0$$

$$\lim_{\substack{T\to 0\\ t\neq 0}} \frac{1}{T}\cdot e^{-t/T} = \lim_{\substack{T\to 0\\ t\neq 0}} \frac{\frac{1}{T}}{e^{t/T}} = \lim \frac{+\frac{1}{\cancel{T^2}}}{e^{t/T}\cdot\left(+\frac{t}{\cancel{T^2}}\right)}$$

$$= \lim \frac{1}{e^{t/T}\cdot t} = 0 \; ; \; \lim_{\substack{T\to 0\\ t=0}} \frac{1}{T}\cdot e^{-t/T} = \text{undef.}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{T} e^{-t/T}\,dt = \frac{1}{T}\cdot e^{-t/T}\cdot(-T)\Big|_0^\infty = \underline{\underline{1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to 0} \frac{d}{dt} e_2(t) = \underline{\underline{\delta(t)}}$$

Aufgabe 1.2 (8 %-Punkte)

Berechnen Sie die Spektren $E_1(f)$ und $E_2(f)$ der Testsignale $e_1(t)$ bzw. $e_2(t)$ für $T \neq 0$!

Hinweis: Verwenden Sie im Fall $e_1(t)$ geschickt den Integralsatz der Fourier-Transformation!

UP1.1:

$$\frac{d e_1(t)}{dt} = \frac{1}{T}\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$E_1'(f) = \frac{1}{\cancel{T}}\cdot \cancel{T}\cdot \mathrm{si}(\pi T f)\cdot e^{-j\cancel{2}\pi f\cdot T/\cancel{2}}$$

$$= \underline{\mathrm{si}(\pi T f)\cdot e^{-j\pi T f}}$$

Integralsatz:

$$\int e_1(t)\,dt \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{E_1'(f)}{j2\pi f} + \frac{E_1'(0)}{2}\cdot\delta(f)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\mathrm{si}(\pi T f)\cdot e^{-j\pi f T}}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)}}$$

$$e_2(t) = \varepsilon(t) \cdot \left(1 - e^{-t/T}\right)$$

$$= \varepsilon(t) - \varepsilon(t) \cdot \frac{T}{T} \cdot e^{-t/T}$$

$$E_2(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f) - \frac{T}{1 + j2\pi f T}$$

Teil I

Aufgabe 1.3 (8 %-Punkte)

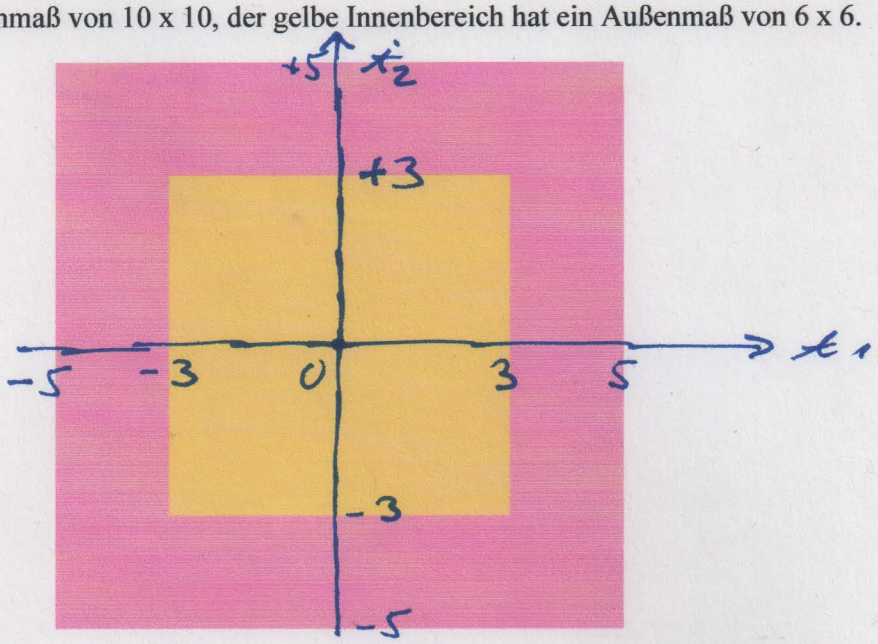
Welches der beiden Testsignale wäre als Ersatz des idealen Sprungs $\varepsilon(t)$ zu bevorzugen?
Könnte bei Verwendung des Signals Ihrer Wahl die ideale Sprungantwort berechnet werden?
(Richtige Begründung erforderlich)

a) $e_2(t)$ ist zu bevorzugen, da $E_1(f)$ Nullstellen an $f = \frac{k}{T}$ $(k \in \mathbb{N})$ hat. $E_2(f)$ hat keine Nullstelle!

b) Teil I von $E_2(f)$ entspricht dem Spektrum des idealen Sprungs!

Aufgabe 2 (22 %-Punkte)

Das Signal $s(\vec{t})$ repräsentiert das folgende Bild. Für den rosafarbenen Bereich gilt $s(\vec{t})=1$. Für den gelben Innenbereich gilt $s(\vec{t})=2$. Ansonsten ist $s(\vec{t})=0$. Der rosafarbene Bereich hat ein Außenmaß von 10 x 10, der gelbe Innenbereich hat ein Außenmaß von 6 x 6.



Es soll eine 2-dimensionale Fourier-Transformation durchgeführt werden.

Aufgabe 2.1 (4 %-Punkte)

Tragen Sie in obiger Darstellung ein Koordinatensystem (t_1, t_2) ein, welches eine möglichst **einfach** zu berechnende Fourier-Transformation des Bildes erlaubt.

Aufgabe 2.2 (6 %-Punkte)

Berechnen Sie das 2-dimensionale Spektrum $S(\vec{f})$ des Signals $s(\vec{t})$!
Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich!

$$s(\vec{t}) = \mathrm{rect}\left(\frac{t_1}{6}\right) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t_2}{6}\right)$$ nur innen

$$+ \mathrm{rect}\left(\frac{t_1}{10}\right) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t_2}{10}\right)$$ innen und außen

$$\Rightarrow S(\vec{f}) = 36 \cdot si(\pi f_1 \cdot 6) \cdot si(\pi f_2 \cdot 6)$$
$$+ 100 \cdot si(\pi f_1 \cdot 10) \cdot si(\pi f_2 \cdot 10)$$

Aufgabe 2.3 (6 %-Punkte)

Die ursprüngliche 2-dimensionale Funktion $s(\vec{t})$ wird als Bild interpretiert und wird um 90° gedreht. **Berechnen** (direkte Angabe der Lösung reicht nicht) Sie mit Hilfe der folgenden Drehmatrix das sich nun ergebene neue Spektrum $\tilde{S}(\vec{f})$! Vergleichen Sie nachvollziehbar Ihr Ergebnis mit dem Spektrum des Originalbildes! **Was ist zu beobachten**?

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{S}(\vec{\tilde{f}}) = 36 \cdot si(\pi(+f_2) \cdot 6) \cdot si(\pi f_1 \cdot 6)$$

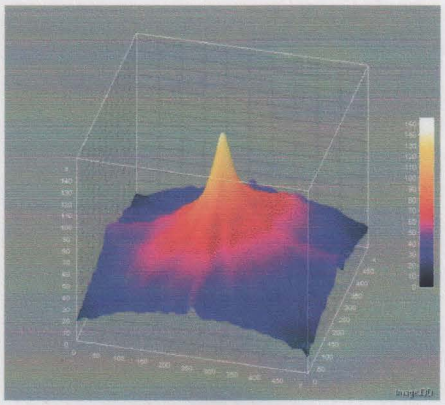
$$+ 100 \cdot si(\pi(+f_2) \cdot 10) \cdot si(\pi f_1 \cdot 10)$$

$$= \underline{\underline{S(\vec{f})}} \checkmark$$

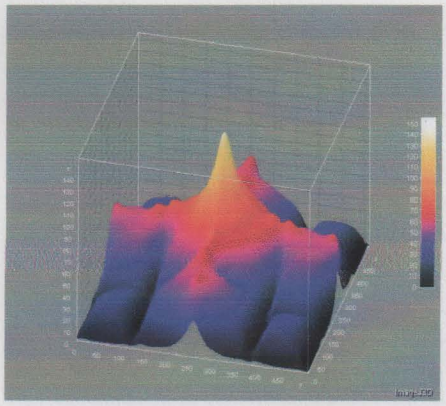
leer

Aufgabe 2.4 (6 %-Punkte)

Gegeben ist das folgende Bild mit seinem zugehörigen Spektrum.



Nach einer mathematischen Operation ergibt sich nun das folgende Bild.



Welche Operation wurde durchgeführt und wie ist das Ergebnis zu erklären?

Das Originalbild wurde unterabgetastet!
Das Spektrum oben rechts wird durch die
falsche TP-Filterung mit Überlappung
(unte rechts) wiederholt! => Aliasfehler
links unten!

Aus

Aufgabe 3 (22 %-Punkte)

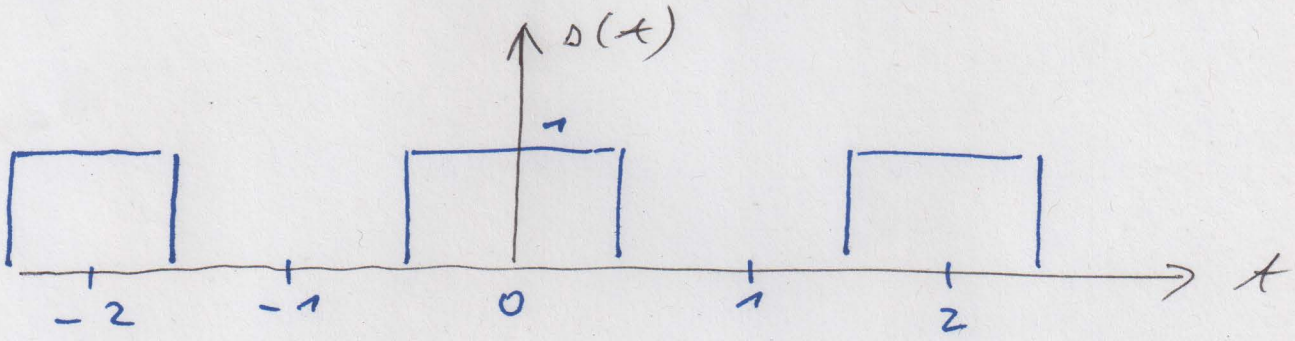
Es soll die Autokorrelation einer periodischen Funktion hergeleitet werden.

Aufgabe 3.1 (4 %-Punkte)

Gegeben ist das Signal

$$s(t) = \sum_{k=-N}^{+N} rect(t-2k)$$

Skizzieren Sie das Signal $s(t)$ unter Angabe charakteristischer Werte für $N=1$!



Aufgabe 3.2 (8 %-Punkte)

Berechnen **und** skizzieren Sie

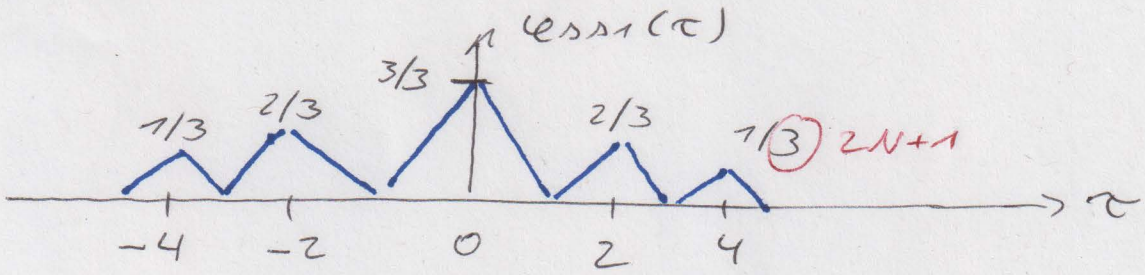
$$\varphi_{ss}(\tau) = \frac{1}{2N+1} s(-\tau) * s(\tau)$$

unter Angabe charakteristischer Werte für $N=1$ und für $N=2$!

N=1: 3 Rechtecke!

$$\varphi_{ss1} = \frac{1}{3}\left(rect(+\tau+2) + rect(+\tau) + rect(+\tau-2)\right) * \left(rect(\tau-2) + rect(\tau) + rect(\tau+2)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(3\cdot\Lambda(\tau) + 2\cdot\Lambda(\tau+2) + \Lambda(\tau+4) + 2\cdot\Lambda(\tau-2) + \Lambda(\tau-4)\right)$$



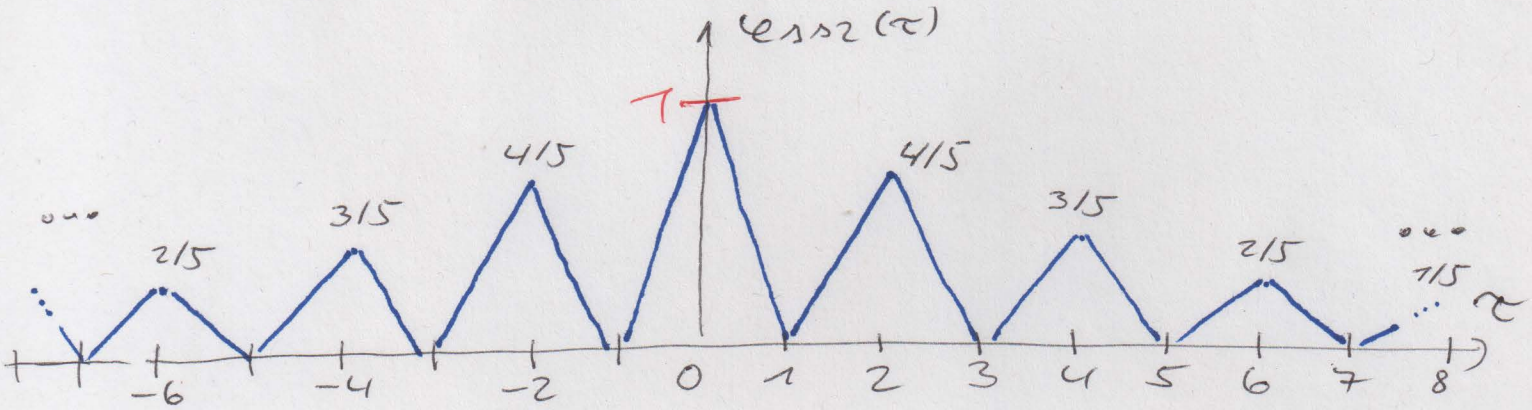
$N=2$: $$\varphi_{ss2} = \frac{1}{5}\Big(\mathrm{rect}(-\tau-4) + \mathrm{rect}(-\tau-2) + \mathrm{rect}(-\tau) + \ldots + \mathrm{rect}(-\tau+4)\Big) * \Big(\mathrm{rect}(\tau-4) + \mathrm{rect}(\tau-2) + \mathrm{rect}(\tau) + \ldots + \mathrm{rect}(\tau+4)\Big)$$

$\Rightarrow$ 5 Mal $\Lambda(\tau)$

4 Mal $\Lambda(\tau-2)$ bzw. $\Lambda(\tau+2)$

$\vdots$

1 Mal $\Lambda(\tau-8)$ bzw. $\Lambda(\tau+8)$



Aufgabe 3.3 (10 %-Punkte)

Bilden Sie nun den Grenzwert (Herleitung erforderlich!)

$$\varphi_{\tilde{s}\tilde{s}}(\tau) = \lim_{N\to\infty} \varphi_{ss}(\tau)$$

Was ist zu beobachten?

Betrachte UP 3.2:

$N=1$ liefert $3/3$; $2/3$; $1/3$

$N=2$ " $5/5$; $4/5$, ... , $1/5$

$\Rightarrow$ Anzahl $= 2N+1$

$\Rightarrow$ Amplitude $= \dfrac{2N-1-|k|}{2N+1} = 1 - \dfrac{|k|}{2N+1}$; $k \in [-N; +N]$

$\Rightarrow \lim\limits_{N\to\infty} \left(1 - \dfrac{|k|}{2N+1}\right) = \underline{\underline{1}}$ für $k \in \mathbb{G}$

Aufgabe 4 (30 %-Punkte)

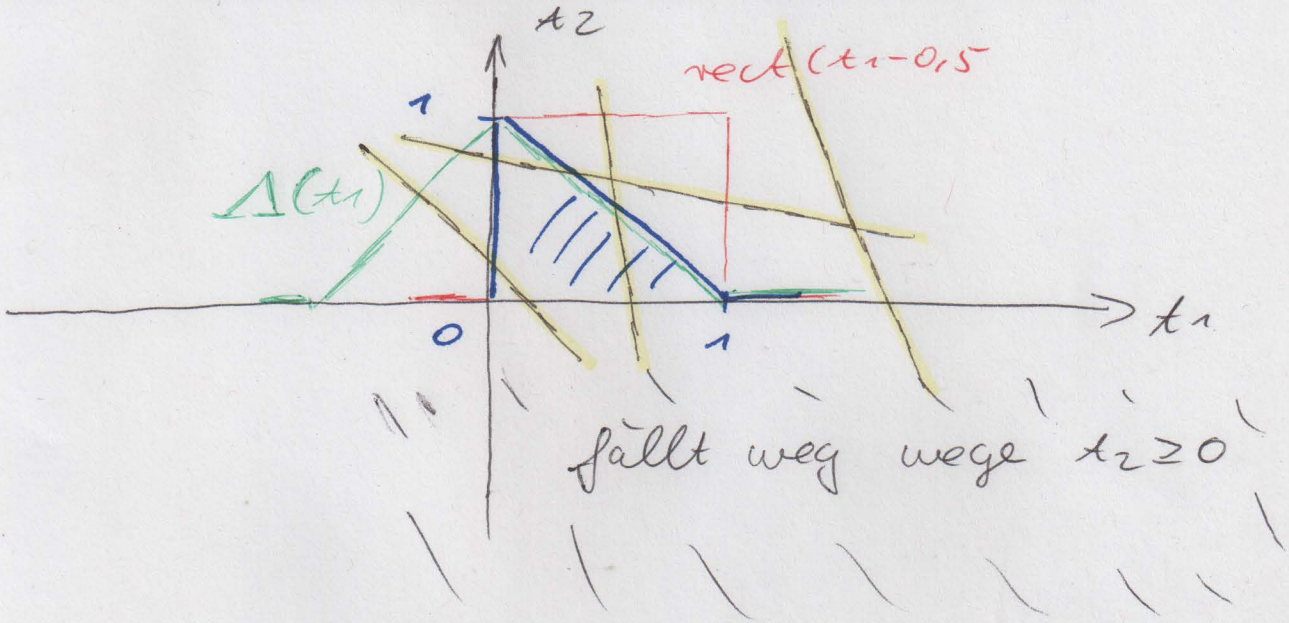
Gegeben ist die 2-dimensionale Funktion $s(t_1,t_2)$ mit

$$s(t_1,t_2)=\begin{cases} 2018 & t_2 \le \Lambda(t_1)\cdot rect(t_1-0{,}5) \quad \text{und} \quad t_2 \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es soll **teilweise** die Radon-Transformierte von $s(t_1,t_2)$ bestimmt werden!

Aufgabe 4.1 (6 %-Punkte)

Skizzieren Sie 2-dimensional unter Angabe charakteristischer Werte die Funktion $s(t_1,t_2)$!



Aufgabe 4.2 (6 %-Punkte)

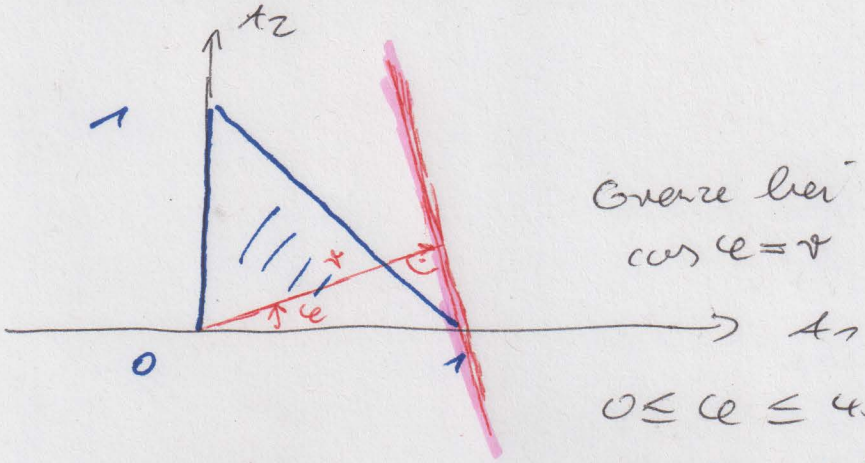
Zur Berechnung der Radon-Transformierten sind Fallunterscheidungen zu treffen. Kennzeichnen Sie in Ihrer Skizze aus UP3.1 eindeutig die Szenarien, die für den Bereich $r>0$ *und* $0^o \le \varphi \le 90^o$ möglich sind.

Es exe. 4 Szenarien! (s.o.)

Aufgabe 4.3 (6 %-Punkte)

Geben Sie für das Szenario $R\{s(\vec{t})\} \equiv 0$ eine Beziehung für den Bereich der Radon-Variable r als Funktion des Winkels φ an!

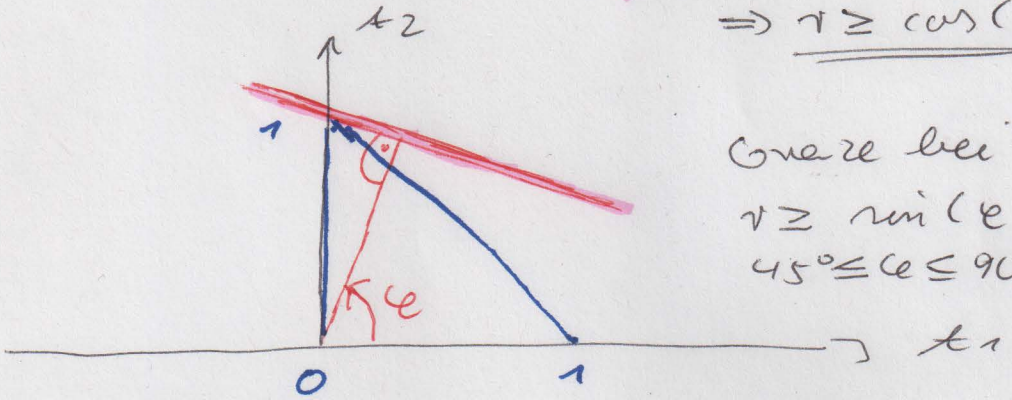
Eine explizite Berechnung der Transformation ist nicht notwendig!



Grenze bei
$\cos\varphi = r$

$0 \leq \varphi \leq 45°$

$\Rightarrow \underline{\underline{r \geq \cos(\varphi)}}$

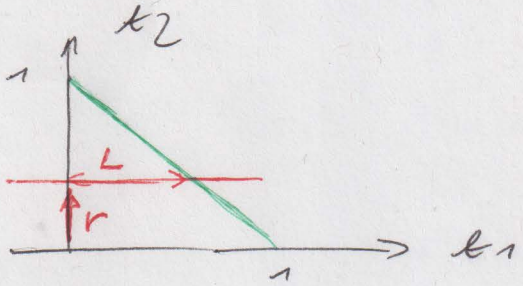


Grenze bei
$r \geq \sin(\varphi)$
$45° \leq \varphi \leq 90°$

Aufgabe 4.4 (12 %-Punkte)

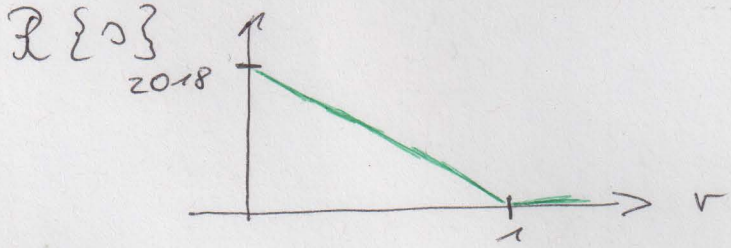
Nun soll die Radon-Transformation für zwei Sonderfälle ausgeführt werden. Bestimmen und skizzieren Sie unter Angabe **charakteristischer** Werte die Radon-Transformierte für $\varphi = 30^o$ und für $\varphi = 90^o$!

$\varphi = 90^o$:



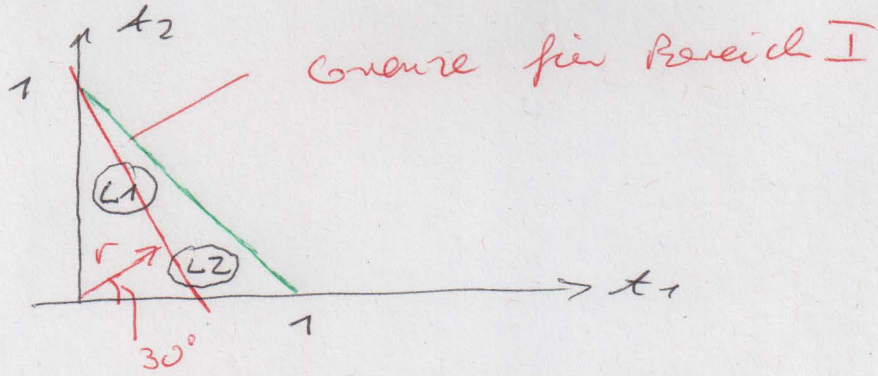
$$\Rightarrow L = 1 - r$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}\{s(t_1, t_2)\} = 2018 \cdot (1 - r)$$



$\varphi = 30^o$: 2 Bereiche !

Bereich I:



es gilt: $\frac{r}{L1} = \tan\varphi \Rightarrow L1 = \frac{r}{\tan\varphi}$

$\frac{L2}{r} = \tan\varphi \Rightarrow L2 = r \cdot \tan\varphi$

$$L = L1 + L2 = r\left(\tan\varphi + \frac{1}{\tan\varphi}\right)$$

→

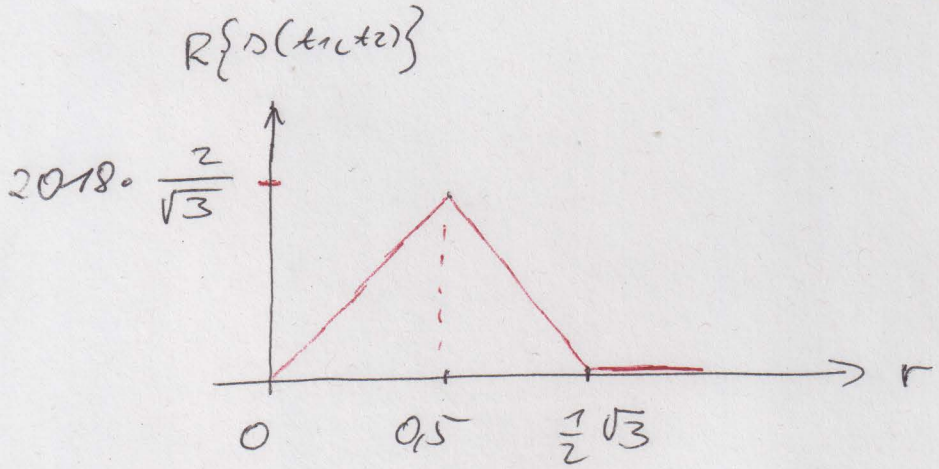
$$L = r \cdot \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \right) = r \cdot \frac{1}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4r}{\sqrt{3}}}} \qquad 0 \leq r \leq 0{,}5 \qquad (\sin 30^\circ = 0{,}5)$$

Grenze für Bereich II: $(L = 0)$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow$ Gerade gl. Steigung $= -\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{R}\{s(t_1, t_2)\}\Big|_{\varphi=30^\circ} = \begin{cases} 2018 \cdot \frac{4r}{\sqrt{3}} & 0 \leq r \leq 0{,}5 \\ 2018 \cdot \left(\frac{4}{3-\sqrt{3}} (r - 0{,}5) + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) & \text{für } \frac{2}{\sqrt{3}} \leq r \leq \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & r > \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{cases}$$



Hier ist das Ende!

Viel Erfolg!