Modulprüfung

Systemtheorie

31. Juli 2013

Prüfer: Prof. Dr. P. Pogatzki

Bearbeitungszeit: 2 Stunden
Hilfsmittel:
Taschenrechner, Formelblatt (2 DIN A4-Seiten)

Name:______________________________ Vorname:____________________
(Druckbuchstaben) (Druckbuchstaben)

Matr.-Nr.: | | | | | | |

Unterschrift:____

Viel Erfolg!!!

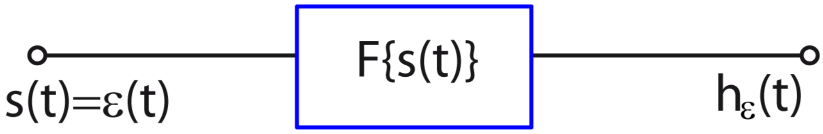
%-Punkte								
Aufgabe	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	Summe
1.								
2.								
3.								
4.								
						%-Punkte gesamt		
						Bewertungs-Punkte		

1. Prüfer

Eingesehen am: Unterschrift:

Aufgabe 1 (29 %-Punkte)

Gegeben ist ein LTI-System, welches durch seine **Sprung-Antwort** $h_\varepsilon(t)$ beschrieben wird.



Es gilt:

$$h_\varepsilon(t) = \sin(t) \cdot \varepsilon(t)$$

Aufgabe 1.1 (6 %-Punkte)

Prüfen Sie, ob Sprung-Antwort und die zugehörige Stoß-Antwort $h(t)$ orthogonal sind!

Aufgabe 1.2 (8 %-Punkte)

Es wird behauptet, dass für jedes System Stoß-Antwort und Sprung-Antwort orthogonal sind, wenn

$$\lim_{t\to\infty}\left(h_\varepsilon^2\left(t\right)-h_\varepsilon^2\left(-t\right)\right)=0$$

gilt. Die Sprung-Antwort sei dabei stetig.
Überprüfen Sie diese Behauptung!

<u>Aufgabe 1.3</u> (8 %-Punkte)

Das System aus UP1.1 wird nun mit

$$s(t) = rect\left(\frac{t - \pi / 2}{\pi}\right)$$

angeregt. Berechnen und skizzieren **Sie unter Angabe charakteristischer Größen** das zugehörige Ausgangssignal $g(t)$ **mit Hilfe des Faltungsintegrals!**

Aufgabe 1.4 (7 %-Punkte)

Beweisen Sie, dass für eine Gauß-Verteilung

$$\lim_{\sigma \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-m}{\sigma} \right)^2} \right) = \delta\left(x-m\right)$$

gilt.

Aufgabe 2 (25 %-Punkte)

Gegeben ist das Signal $s(\vec{t})$ mit

$$s(\vec{t}) = \left(1 \cdot \varepsilon(t_1) + 2 \cdot \varepsilon(-t_1)\right) \cdot \left(3 \cdot \varepsilon(t_2) + 4 \cdot \varepsilon(-t_2)\right)$$

Es soll eine 2-dimensionale Fourier-Transformation durchgeführt werden.

Aufgabe 2.1 (4 %-Punkte)

Skizzieren Sie unter **Angabe charakteristischer Werte** das Signal $s(\vec{t})$ in der t_1,t_2-Ebene!

<u>Aufgabe 2.2</u> (8 %-Punkte)

Berechnen Sie das 2-dimensionale Spektrum $S\left(\vec{f}\right)$ des Signals $s\left(\vec{t}\right)$!
Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich!

Aufgabe 2.3 (6 %-Punkte)

Die ursprüngliche 2-dimensionale Funktion $s(\vec{t})$ wird als Bild interpretiert und wird um 45° gedreht. Berechnen Sie mit Hilfe der folgenden Drehmatrix das sich nun ergebene neue Spektrum $\tilde{S}(\vec{f})$!

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.4 (7 %-Punkte)

Es wurde ein Bild (Photo) verschiedenen Transformationen unterzogen. Als Resultat ergaben sich die Bilder A, B, C. Die Spektren aller vier Bilder sind ebenfalls dargestellt (I..IV). Die Reihenfolge der Spektren stimmt nicht unbedingt mit der Reihenfolge der Bilder überein! Beschreiben Sie die durchgeführten Transformationen und ordnen Sie die Spektren den Bildern zu (richtige Begründung erforderlich). **Hinweis**: Die Bilder B und C sind **nicht identisch**!

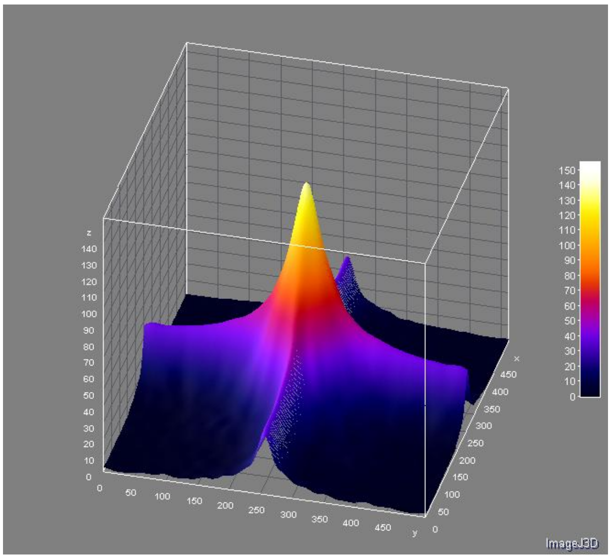
Original

A

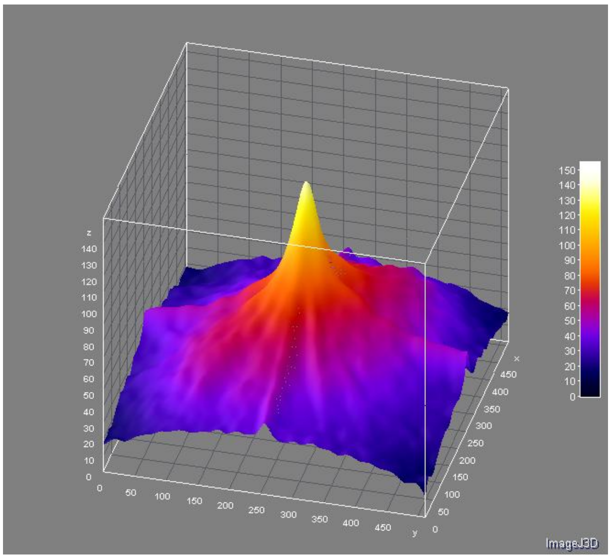
B

C

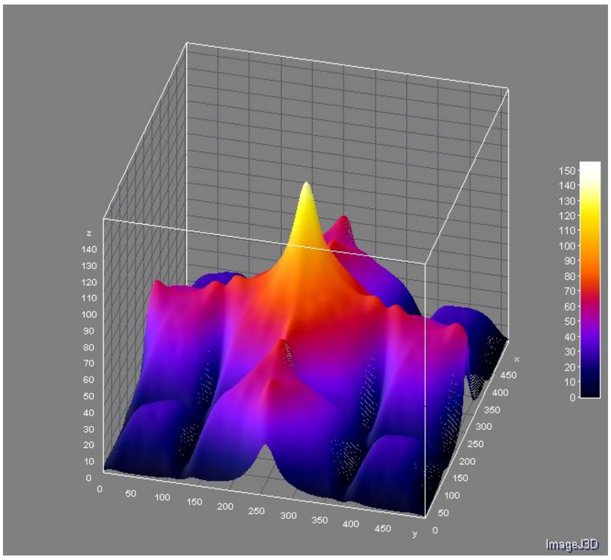
Spektren zu Aufgabe 2.4:



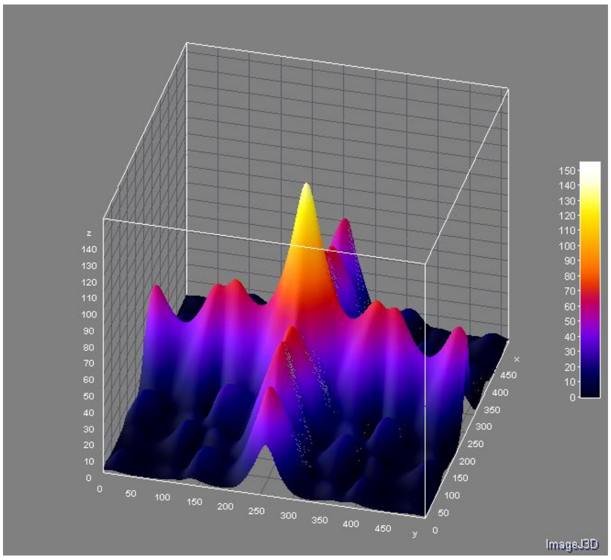
I



II



II



IV

Aufgabe 3 (24 %-Punkte)

Gegeben ist die 2-dimensionale Funktion $s(t_1,t_2)$ mit

$$s(t_1,t_2)=\begin{cases}1 & t_1^2+t_2^2\le 1 \quad \text{und} \quad 0\le t_2\le 1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Es soll **ansatzweise** die Radon-Transformierte von $s(t_1,t_2)$ bestimmt werden!

Aufgabe 3.1 (3 %-Punkte)

Skizzieren Sie 2-dimensional unter Angabe charakteristischer Werte die Funktion $s(t_1,t_2)$!

Aufgabe 3.2 (6 %-Punkte)

Zur Berechnung der Radon-Transformierten sind Fallunterscheidungen zu treffen. Kennzeichnen Sie in Ihrer Skizze aus UP3.1 eindeutig die Szenarien, die für den Bereich $r>0 \quad und \quad 0^o\le\varphi\le 90^o$ möglich sind.

Aufgabe 3.3 (9 %-Punkte)

Geben Sie für jedes zuvor bestimmte Szenario eine Beziehung für den Bereich der Radon-Variable r als Funktion des Winkels φ an! **Eine explizite Berechnung der Transformation ist nicht notwendig!**

<u>Aufgabe 3.4</u> (6 %-Punkte)

Nun soll die Radon-Transformation für zwei Sonderfälle ausgeführt werden. Bestimmen Sie die Radon-Transformierte für $\varphi = 0^o$ und für $\varphi = 45^o$ (**Hinweis**: Suchen Sie zunächst für den 2. Fall eine geeignete Symmetrielinie)!

Aufgabe 4 22 %-Punkte

Gegeben ist eine zeitdiskrete Quelle x(k), die das folgende periodische Signal generiert:

$$x(k) = \cos\left(\frac{\pi k}{L} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Aufgabe 4.1 (6 %-Punkte)

Bestimmen und skizzieren Sie unter Angabe charakteristischer Werte die normierte Autokorrelationsfolge $r_{xx}(\lambda)$ mit

$$r_{xx}(\lambda) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\cdot N+1} \sum_{k=-N}^{+N} x(k)\cdot x(k+\lambda)$$

Aufgabe 4.2 (8%-Punkte)

Es soll nun ein **Prädiktor 2. Ordnung** zum Einsatz kommen. Bestimmen Sie dessen Koeffizienten als Funktion von L mit $L \in \{1, 2, 3, 4\}$ und interpretieren Sie das Ergebnis für den Schätzfehler!

Aufgabe 4.3 (4 %-Punkte)

Ist der Einsatz eines Prädiktors 3. Ordnung für diesen Fall sinnvoll? (**Wertung nur mit richtiger Begründung**)

<u>Aufgabe 4.4</u> (4 %-Punkte)

Es wird nun als Eingangssignal für den zuvor bestimmten Prädiktor

$$x(k) = \sin\left(\frac{2\pi k}{L}\right)$$

verwendet. Welcher Prädiktor ergibt sich nun? (**Wertung nur mit richtiger Begründung**)