Modulprüfung

Systemtheorie

24. Februar 2014

Prüfer: Prof. Dr. P. Pogatzki

Bearbeitungszeit: 2 Stunden
Hilfsmittel:
Taschenrechner, Formelblatt (2 DIN A4-Seiten)

Name:____________________________ Vorname:____________________
(Druckbuchstaben) (Druckbuchstaben)

Matr.-Nr.: | | | | | | |

Unterschrift:____

Viel Erfolg!!!

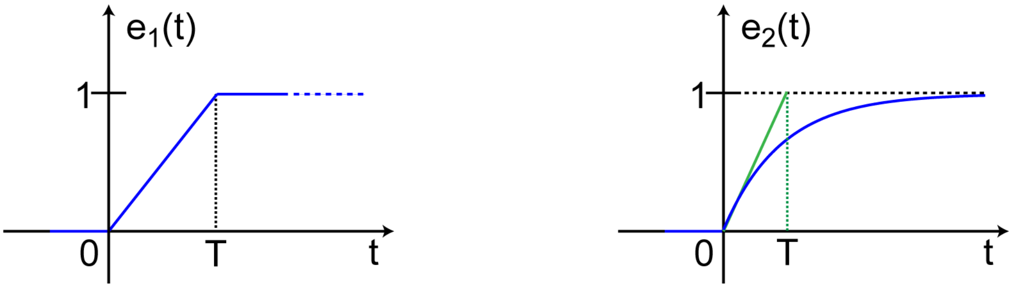
%-Punkte								
Aufgabe	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	Summe
1.								
2.								
3.								
4.								
						%-Punkte gesamt		
						Bewertungs-Punkte		

1. Prüfer

Eingesehen am: Unterschrift:

Aufgabe 1 (22 %-Punkte)

Ein LTI kann im Zeitbereich durch seine Stoßantwort eindeutig beschrieben werden. In der Praxis ist die Erzeugung eines Dirac-Stoßes jedoch schwierig. Daher wird häufig auf die Sprungantwort ausgewichen.
Zur Erzeugung eines **nichtidealen** Sprungs stehen zwei verschiedene Testgeneratoren zur Auswahl. Testgenerator1 erzeugt die Funktion $e_1(t)$, Testgenerator2 erzeugt hingegen $e_2(t)$ (entspricht der Sprungantwort eines TP 1. Ordnung).



Die Eigenschaften der beiden nichtidealen Testsignale sollen miteinander verglichen werden.

Aufgabe 1.1 (8 %-Punkte)

Prüfen Sie, ob für beide Testsignale $e_1(t)$, $e_2(t)$ gilt:

$$\lim_{T\to 0}\left(\frac{d}{dt}e_1(t)\right)=\delta(t) \quad \lim_{T\to 0}\left(\frac{d}{dt}e_2(t)\right)=\delta(t)$$

Aufgabe 1.2 (6 %-Punkte)

Berechnen Sie die Spektren $E_1(f)$ und $E_2(f)$ der Testsignale $e_1(t)$ bzw. $e_2(t)$!

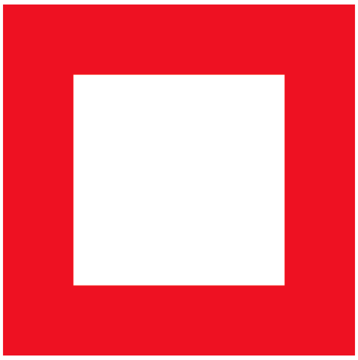
Hinweis: Verwenden Sie im Fall $e_1(t)$ geschickt den Integralsatz der Fourier-Transformation!

Aufgabe 1.3 (8 %-Punkte)

Welches der beiden Testsignale wäre als Ersatz des idealen Sprungs $\varepsilon(t)$ zu bevorzugen?
Könnte bei Verwendung des Signals Ihrer Wahl die ideale Sprungantwort berechnet werden?
(Richtige Begründung erforderlich)

Aufgabe 2 (26 %-Punkte)

Das Signal $s(\vec{t})$ repräsentiert das folgende Bild. Für den roten Bereich gilt $s(\vec{t})=1$. Ansonsten ist $s(\vec{t})=0$. Der rote Bereich hat ein Außenmaß von 10 x 10, der weiße Innenbereich hat ein Außenmaß von 6 x 6.



Es soll eine 2-dimensionale Fourier-Transformation durchgeführt werden.

Aufgabe 2.1 (2 %-Punkte)

Tragen Sie in obiger Darstellung ein Koordinatensystem (t_1, t_2) ein, welches eine möglichst einfach zu berechnende Fourier-Transformation des Bildes erlaubt.

Aufgabe 2.2 (6 %-Punkte)

Berechnen Sie das 2-dimensionale Spektrum $S(\vec{f})$ des Signals $s(\vec{t})$!
Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich!

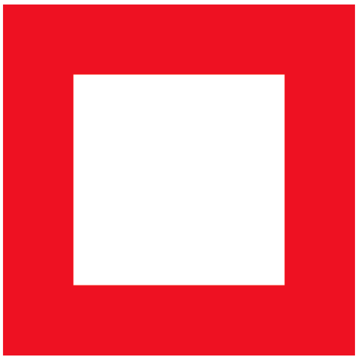
<u>Aufgabe 2.3</u> (6 %-Punkte)

Die ursprüngliche 2-dimensionale Funktion $s(\vec{t})$ wird als Bild interpretiert und wird um 90° gedreht. **Berechnen** Sie mit Hilfe der folgenden Drehmatrix das sich nun ergebene neue Spektrum $\tilde{S}(\vec{f})$! Vergleichen Sie nachvollziehbar Ihr Ergebnis mit dem Spektrum des Originalbildes! **Was ist zu beobachten**?

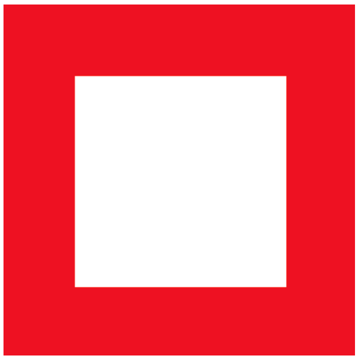
$$\overleftrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

<u>Aufgabe 2.4</u> (6 %-Punkte)

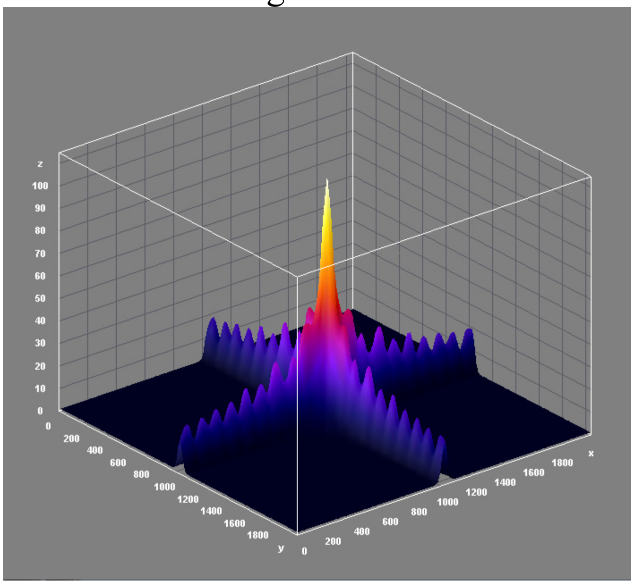
Das Orginalbild $s(\vec{t})$ wurde einer Unterabtastung um **den Faktor 4** unterzogen. Beide Bilder und deren Spektren sind unten dargestellt und sind nahezu identisch.



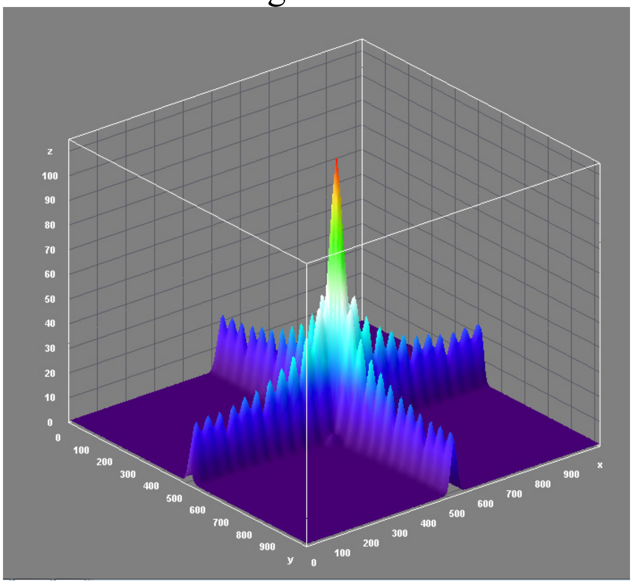
Original-Bild



Unterabgetastetes Bild



Original-Spektrum



Spektrum des unterabgetasteten Bildes

Hingegen ergibt sich bei gleicher Unterabtastung (Faktor 4) für ein anderes Bild:

Original

Unterabgetastetes Bild

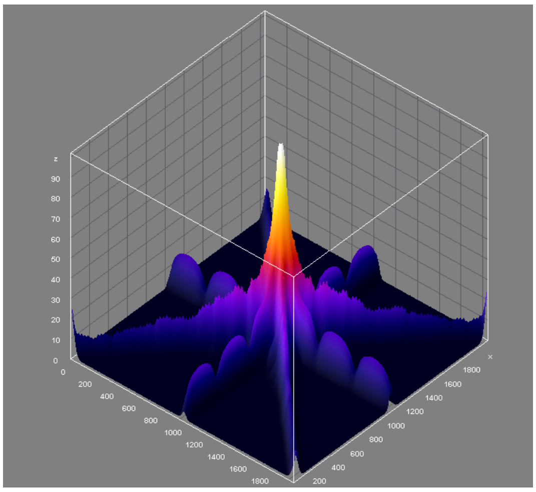
Erklären und begründen Sie das unterschiedliche Verhalten der Bilder bzgl. der Unterabtastung!

Aufgabe 2.5 (6 %-Punkte)

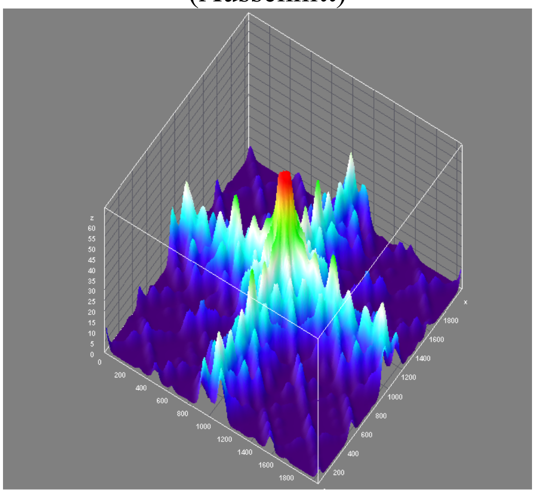
Bei der folgenden Untersuchung wurde das ursprüngliche Bild um 45° gedreht □ → ◇ und dann wieder um den Faktor 4 unterabgetastet. Es ergeben sich die folgenden vergrößerten Darstellungen für jeweils einen Bildausschnitt und die entsprechenden Spektren.

Original-Bild um 45° gedreht
(Ausschnitt)

Original-Bild um 45° gedreht und um den Faktor 4 unterabgetastet
(Ausschnitt)



Spektrum des gedrehten Bildes



Spektrum des gedrehten und unterabgetasteten Bildes

Begründen Sie die unterschiedlichen Auswirkungen der Unterabtastung im Vergleich zu UP2.4 und erklären Sie die entstandenen Spektren!

<u>Aufgabe 3</u> (26 %-Punkte)

Gegeben ist die 2-dimensionale Funktion $s(t_1,t_2)$ mit

$$s(t_1,t_2)=\begin{cases}11 & t_2 \le \sqrt{3}\Lambda(t_1) \quad \text{und} \quad t_2 \ge 0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Es soll **teilweise** die Radon-Transformierte von $s(t_1,t_2)$ bestimmt werden!

<u>Aufgabe 3.1</u> (3 %-Punkte)

Skizzieren Sie 2-dimensional unter Angabe charakteristischer Werte die Funktion $s(t_1,t_2)$!

<u>Aufgabe 3.2</u> (6 %-Punkte)

Zur Berechnung der Radon-Transformierten sind Fallunterscheidungen zu treffen. Kennzeichnen Sie in Ihrer Skizze aus UP3.1 eindeutig die Szenarien, die für den Bereich $r > 0 \quad und \quad 0^o \le \varphi \le 90^o$ möglich sind.

<u>Aufgabe 3.3</u> (9 %-Punkte)

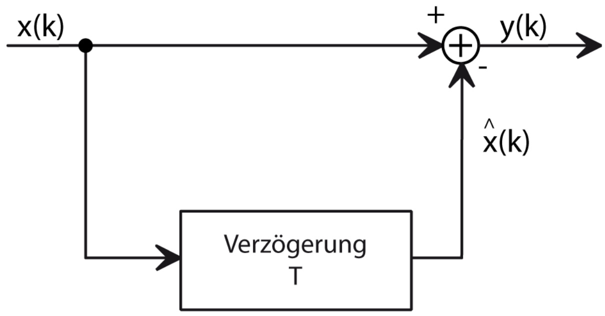
Geben Sie für das Szenario $R\left\{s\left(\vec{t}\right)\right\} \equiv 0$ eine Beziehung für den Bereich der Radon-Variable r als Funktion des Winkels φ an!
Geben Sie ferner für ein **weiteres** Szenario Ihrer Wahl eine Beziehung für den Bereich der Radon-Variable r als Funktion des Winkels φ an.
Eine explizite Berechnung der Transformation ist nicht notwendig!

Aufgabe 3.4 (8 %-Punkte)

Nun soll die Radon-Transformation für zwei Sonderfälle ausgeführt werden. Bestimmen und skizzieren Sie unter Angabe **charakteristischer** Werte die Radon-Transformierte für $\varphi = 30^o$ und für $\varphi = 90^o$!

Aufgabe 4 26 %-Punkte

Gegeben ist eine wertekontinuierliche **und gleichverteilte** Quelle x(k) mit $-1 < x(k) < +1$.
Die Quelle X ist **gedächtnislos!**
Die **algebraische** Summe aus $x(k)$ und dem um einen Takt verzögerten und modifizierten Signal ergibt das eigentliche Quellensignal $y(k)$!



Für die Quelle y(k) soll ein optimaler Prädiktor entworfen werden.

Aufgabe 4.1 (6 %-Punkte)

Skizzieren Sie unter Angabe charakteristischer Werte die PDFs der Signale
$x(k)$, $\hat{x}(k)$, $y(k)$!

Aufgabe 4.2 (8%-Punkte)

Bestimmen Sie die Autokorrelationsfolge $r_{yy}(\lambda)$ des Signals $y(k)$ und skizzieren Sie diese unter Angabe charakteristischer Werte für $-5 \leq \lambda \leq +5$!

<u>Aufgabe 4.3</u> (6%-Punkte)

Berechnen Sie nun die Koeffizienten eines Prädiktors **1. Ordnung** **und** eines Prädiktors **2. Ordnung** für die Quelle Y!

Aufgabe 4.4 (4%-Punkte)

Berechnen Sie für beide Prädiktoren den Prädiktionsgewinn in dB!

Aufgabe 4.5 (2 %-Punkte)

Ist der Einsatz eines Prädiktors höherer Ordnung als 2 für diesen Fall sinnvoll? (**Wertung nur mit richtiger Begründung**)