Fachprüfung

Signal- und Systemtheorie

8. September 2006

Prüfer: Prof. Dr. P. Pogatzki

Bearbeitungszeit: 2 Stunden
Hilfsmittel:
Taschenrechner, Formelblatt (2 DIN A4-Seiten)

Name: MuLö
Matr.-Nr.:.....
Unterschrift:.....

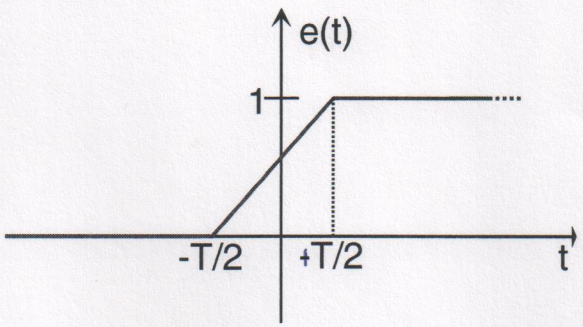
Punkte								
Aufgabe	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	Summe
1.								
2.								
3.								13min
4.								
						Punkte gesamt		

Note: ECTS: 1. Prüfer 2. Prüfer

Eingesehen am: Unterschrift:

Aufgabe 1 (24 Punkte)

Ein LTI kann im Zeitbereich durch seine Stoßantwort eindeutig beschrieben werden. In der Praxis ist die Erzeugung eines Dirac-Stoßes jedoch schwierig. Daher wird häufig auf die Sprungantwort ausgewichen.
Ein Testgenerator liefert die unten dargestellte **nichtideale** Sprungfunktion e(t).



Aufgabe 1.1 (2 Punkte)

Wie kann aus der Sprungantwort die Stoßantwort bestimmt werden?

Die Ableitung der Sprungantwort ergibt die Stoßantwort!

Aufgabe 1.2 (10 Punkte)

Es soll nun die gegebene Sprungfunktion e(t) mit der idealen Sprungfunktion ε(t) verglichen werden. Bestimmen Sie für

$$e(t) \circ\!\!-\!\!\bullet E_e(f)$$

das Spektrum der nichtidealen Sprungantwort mit Hilfe des **Integralsatzes** der Fourier-Transformation. **Beschreiben Sie dazu e(t) geeignet als Integral eines rect-Impulses!**

$$e'(t) = \frac{d}{dt} e(t) = \begin{cases} 0 & t < -T/2 \\ 1/T & -T/2 \leq t \leq +T/2 \\ 0 & t > T/2 \end{cases}$$

$$e'(t) = \frac{1}{T} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \qquad e'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{T}{T} \cdot si(\pi T f)$$

$$= si(\pi T f)$$

$$\Rightarrow \int e'(t)\,dt \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{E_{e'}(f)}{j2\pi f} + \frac{E_{e'}(0)}{2}\cdot\delta(f)$$

$$= \frac{\sin(\pi T f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\cdot\delta(f)$$

Aufgabe 1.3 (6 Punkte)

Ist die **relative** Abweichung des Spektrums $E_e(f)$ vom Spektrum der idealen Sprungfunktion $E_\varepsilon(f)$ eher bei „hohen" oder eher bei „niedrigen" Frequenzen zu finden (Begründung)?

Eher bei hohe Freq., da $\lim_{f\to\infty}\left(\frac{\sin(\pi T f)}{j2\pi f}\right) = 0$

$\Rightarrow$ Das Spektrum besteht bei „hohe" Freq. nur noch aus $\frac{1}{2}\delta(f)$!

Aufgabe 1.4 (6 Punkte)

Es wird behauptet, daß die maximale **absolute** Abweichung der Imaginärteile der Spektren

$\mathrm{Im}\{E_e(f)-E_\varepsilon(f)\}$ an der Stelle

$f \cdot T = 1$

zu finden ist. Überprüfen Sie diese Behauptung!

$$\Delta = \frac{\sin(\pi T f)}{2\pi f} - \frac{1}{2\pi f} \Rightarrow \text{suche relatives Maximum da absolutes Max auch rel. Max ist}$$

$$= \frac{\sin(\pi T f)}{2\pi^2 T f^2} - \frac{1}{2\pi f}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial f} = \frac{\cos(\pi T f)\cdot \pi T 2\pi^2 T f^2 - 4\pi^2 T f \sin(\pi T f)}{4\pi^4 T^2 f^4} + \frac{1}{2\pi f^2}$$

$$= \frac{2\pi^3 T^2 f^2 \cos(\pi T f) - 4\pi^2 T f \cdot \sin(\pi T f)}{4\pi^4 T^2 f^4} + \frac{1}{2\pi f^2}$$

$$= \frac{2\pi T f \cdot \cos(\pi T f) - 4\sin(\pi T f) + 2\pi T f}{4\pi^2 T f^3} \stackrel{!}{=} 0$$

$T \cdot f = 1$: $\quad 2\pi \cdot \cos(\pi) - 4 \cdot \sin(\pi) + 2\pi \stackrel{?}{=} 0$

$-2\pi \quad -0 \quad +2\pi \quad = 0$ ✓

$\Rightarrow$ rel. Maximum, wegen $\frac{1}{2\pi f}$ ist es auch das absolute Maximum!

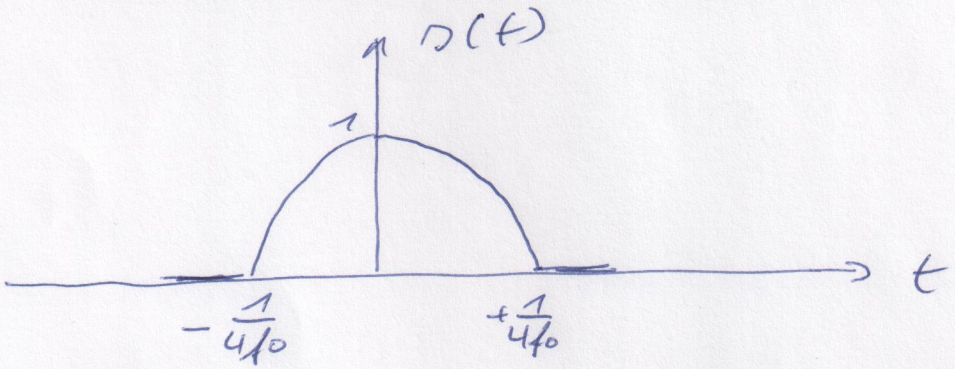
Aufgabe 2 (24 Punkte)

Gegeben ist das zeitbegrenzte Signal s(t) mit

$$s(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & -\frac{1}{4f_0} \le t \le +\frac{1}{4f_0} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Aufgabe 2.1 (2 Punkte)

Skizzieren Sie unter **Angabe charakteristischer Werte** die Zeitfunktion s(t)!



Aufgabe 2.2 (6 Punkte)

Berechnen Sie das Spektrum S(f) des Signals s(t)! Wenden Sie dabei die **Theoreme der Fourier-Transformation** an.

$s(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cdot \mathrm{rect}(2 f_0 t)$

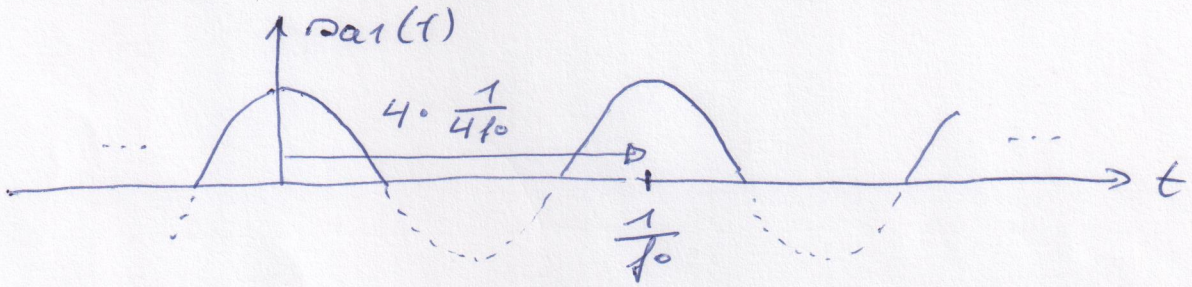
↑ Dauer des cos-Impulses ist $2 \times \frac{1}{4f_0}$

$$S(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right) * \frac{1}{2f_0} \cdot si\left(\frac{\pi f}{2f_0}\right)$$

Aufgabe 2.3 (10 Punkte)

Mit Hilfe von **Abtastung im Frequenzbereich** soll aus S(f) das Spektrum eines **Einweg-gleichrichters** ermittelt werden.

Ermitteln Sie die notwendige „Abtastrate" f_{a1} im Frequenzbereich! Welches Spektrum $S_{a1}(f)$ ergibt sich (Berechnung)? Was ist die niedrigste von f=0 verschiedene Frequenzkomponente?



Faltung im Zeitbereich ≙ Multiplikation im Freq.-Bereich

$$s(t) * \sum_n \delta\left(t - n \cdot \frac{1}{f_0}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\; S(f) \cdot f_0 \cdot \sum_i \delta(f - i \cdot f_0)$$

Abtastung mit $f_{a1} = f_0$

$$\Rightarrow S_{a1}(f) = \frac{1}{4f_0} \cdot f_0 \cdot \sum_i \left(si\left(\frac{\pi(i f_0 - f_0)}{2 f_0}\right) + si\left(\frac{\pi(i f_0 + f_0)}{2 f_0}\right)\right)$$

$$S_{a1}(f) = \frac{1}{4} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(si\left(\frac{\pi}{2}(i-1)\right) + si\left(\frac{\pi}{2}(i+1)\right)\right)$$

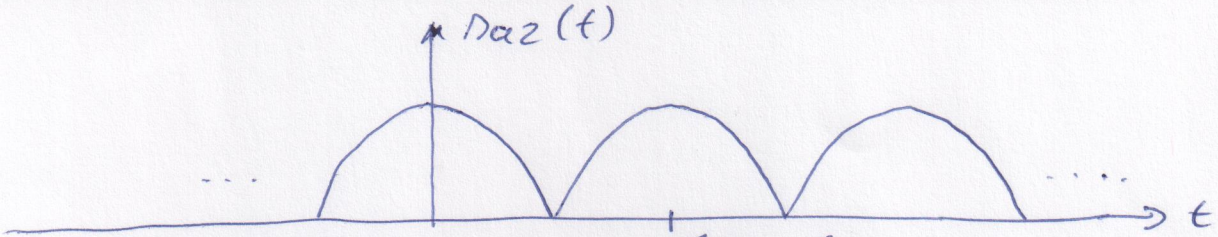
Niedrigste Freq. = f_0 ≙ $i = 1$

$$S_{a1}(f - f_0) = \frac{1}{4}\left(1 + si\left(\frac{2\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 2.4 (6 Punkte)

Mit Hilfe von **Abtastung im Frequenzbereich** soll aus S(f) nun das Spektrum eines **Zweiweggleichrichters** ermittelt werden.

Ermitteln Sie die notwendige „Abtastrate" f_{a2} im Frequenzbereich! Welches Spektrum $S_{a2}(f)$ ergibt sich (Berechnung)? Was ist die niedrigste von f=0 verschiedene Frequenzkomponente?



$$D(f) * \sum_n \delta\left(t - n\frac{1}{2f_0}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\; S(f)\cdot 2f_0 \cdot \sum_i \delta(f - i\cdot 2f_0)$$

$$S_{a2}(f) = \frac{1}{4f_0}\cdot 2f_0 \cdot \sum_i \left(\pi\left(\frac{\pi(i\cdot 2f_0 - f_0)}{2f_0}\right) + \pi\left(\frac{\pi(i2f_0+f_0)}{2f_0}\right)\right)$$

$$S_{a2}(f) = \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left(\pi\left(\frac{\pi}{2}(2i-1)\right) + \pi\left(\frac{\pi}{2}(2i+1)\right)\right)$$

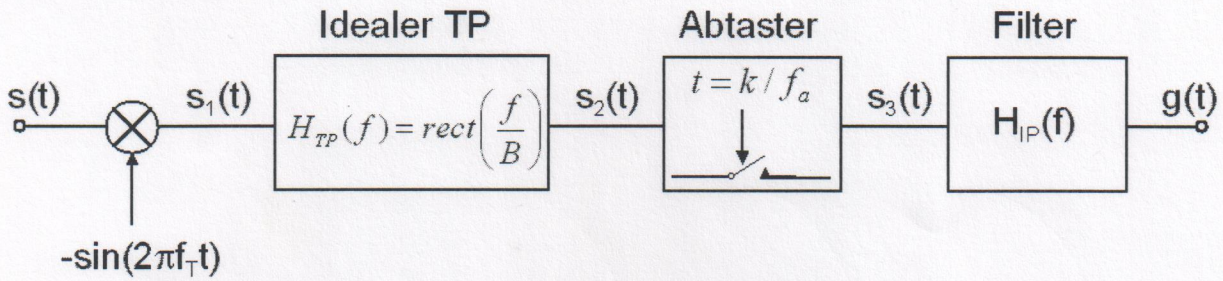
Niedrigste Freq. bei f_{az}

$$\Rightarrow S_{a2}(f=2f_0) = \frac{1}{2}\left(\pi\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) + \pi\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)\right)$$

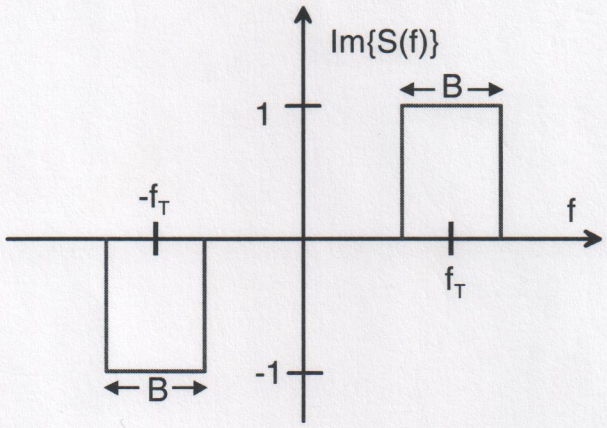
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi}\right) = \frac{2}{3\pi}$$

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Gegeben ist das folgende Übertragungssystem.



Das Eingangssignal s(t) des Systems wird durch sein **rein imaginäres Spektrum** S(f) gemäß Abbildung beschrieben.



Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Ist das Eingangssignal s(t) ein reelles Signal? Ist s(t) gerade oder ungerade (Begründung!)

Rein reell und ungerade. Begründung:

Aus Tabelle $s_{odd}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \; Im\{S(f)\}$,

$Im\{S(-f)\} = -Im\{S(f)\}$

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Ist das Übertragungssystem ein zeitinvariantes System? (Begründung!)

Nein, da mit einer Zeitfunktion multipliziert wird $(-\sin(2\pi f_T t))$

Aufgabe 3.3 (6 Punkte)

Berechnen und skizzieren Sie unter Angabe **charakteristischer Werte** das Spektrum $S_1(f)$ des Signals $s_1(t)$!

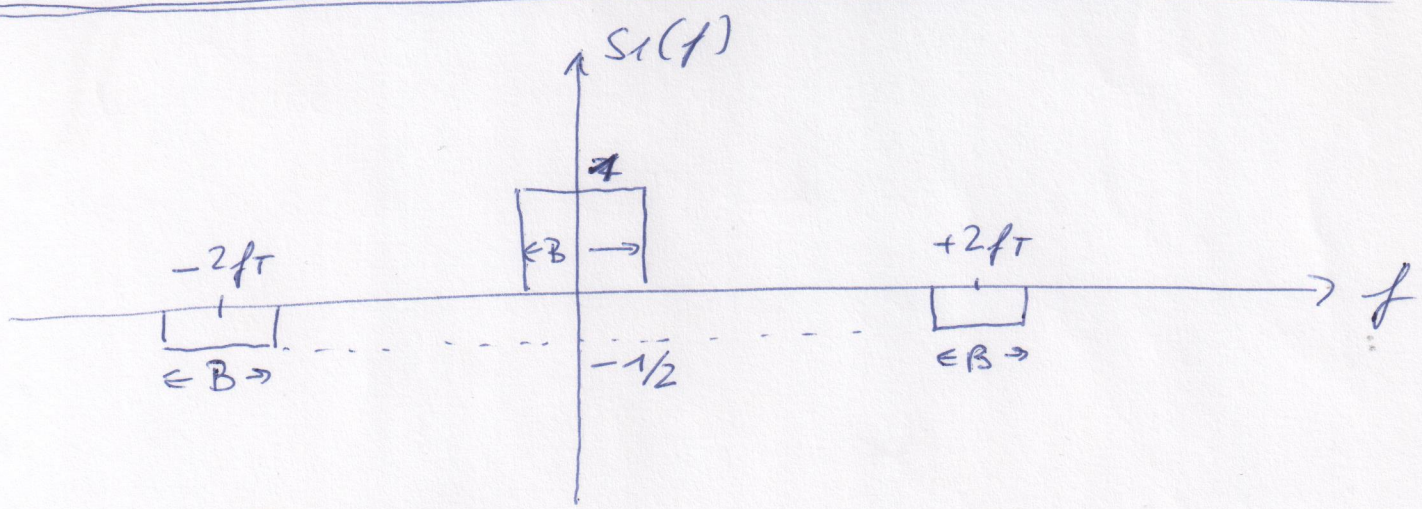
$$-\sin(2\pi f_T t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; -\frac{1}{2j}\left(\delta(f-f_T)-\delta(f+f_T)\right)$$

$$S(f) = j\left(\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_T}{B}\right)-\mathrm{rect}\left(\frac{f+f_T}{B}\right)\right)$$

$$S_1(f) = -\frac{1}{2j}\left(\delta(f-f_T)-\delta(f+f_T)\right) * j\left(\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_T}{B}\right)-\mathrm{rect}\left(\frac{f+f_T}{B}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\mathrm{rect}\left(\frac{f-2f_T}{B}\right)-\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)-\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{f+2f_T}{B}\right)\right)$$

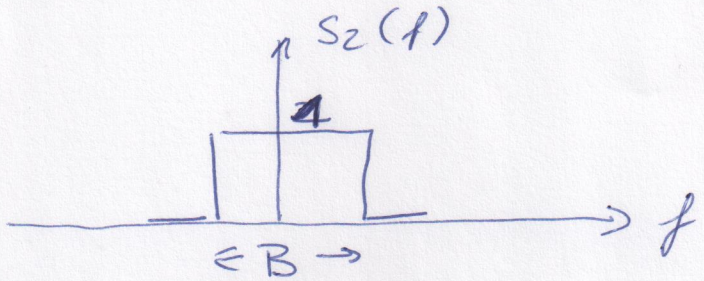
$$S_1(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{rect}\left(\frac{f-2f_T}{B}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{f+2f_T}{B}\right)\right)$$



Aufgabe 3.4 (4 Punkte)

Skizzieren Sie unter Angabe **charakteristischer Werte** das Spektrum $S_2(f)$ am Ausgang des idealen Tiefpasses!
Berechnen Sie das zugehörige Zeitsignal $s_2(t)$!

$S_2(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \circ\!\!-\!\!\circ\; s_2(t) = B \cdot si(\pi B t)$



Aufgabe 3.5 (2 Punkte)

Berechnen Sie die minimale Abtastrate f_a, damit aus dem zeitdiskreten Signal $s_3(t)$ mit Hilfe eines Interpolationsfilters das Signal $s_2(t)$ fehlerfrei rekonstruiert werden kann!

$f_a > 2 \cdot f_{max} = 2 \cdot \frac{B}{2} = B$

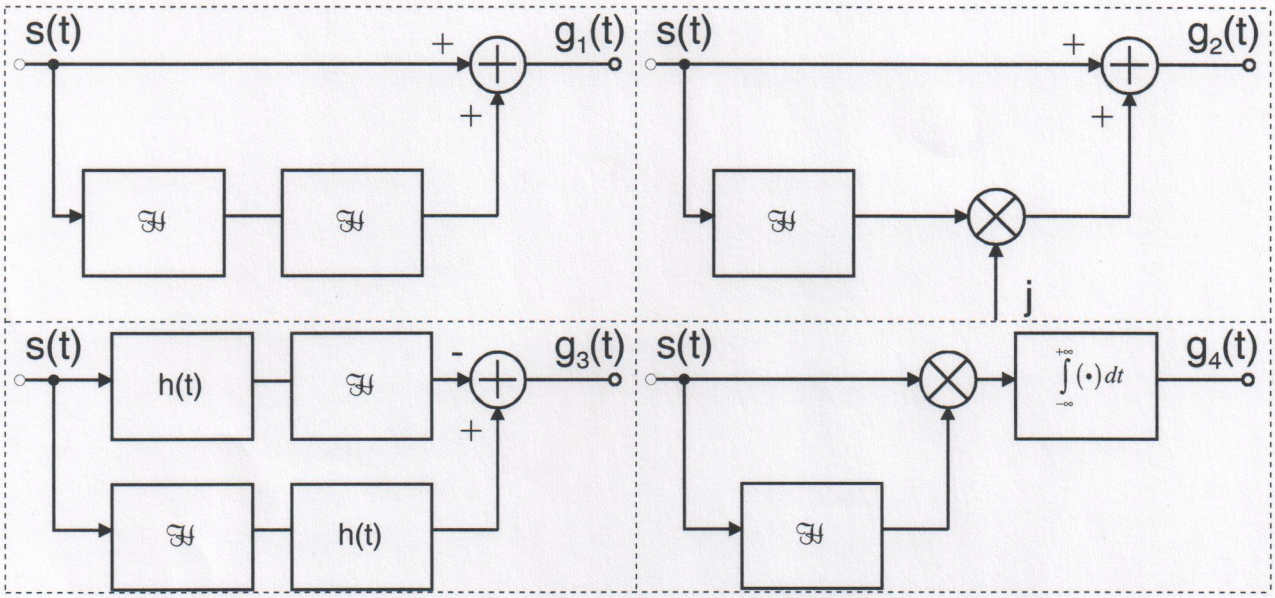
Aufgabe 3.6 (2 Punkte)

Die Abtastung wird nun mit $f_a = 2B$ durchgeführt.
Welche Eigenschaften muß das Interpolationsfilter $H_{IP}(f)$ haben, damit $g(t)$ gleich $s_2(t)$ ist?

Tiefpaß mit f_g: $\frac{B}{2} < f_g < \frac{3}{2} B$

Aufgabe 4 (30 Punkte)

Es sollen einige Eigenschaften der Hilbert-Transformation untersucht werden. Dazu sind die folgenden 4 Systeme gegeben. Dabei beschreibt $\mathcal{H}$ den idealen Hilbert-Transformator.
Das Eingangssignal s(t) ist in allen Fällen reell!



Aufgabe 4.1 (12 Punkte)

Bestimmen Sie für alle 4 Systeme das Ausgangssignal $g_1(t),\ldots, g_4(t)$ und begründen Sie Ihre Antwort!

$H_H = -j\,\mathrm{sgn}(f)$

(1) $S(f)\cdot(-j\,\mathrm{sgn}(f))\cdot(-j\,\mathrm{sgn}(f)) = -S(f)$

$\Rightarrow S(f) - S(f) = G(f) = 0 \Rightarrow \underline{g_1(t) = 0}$

(2) $S(f)\cdot(-j\,\mathrm{sgn}(f))\cdot j + S(f) = G(f)$

$S(f)(\mathrm{sgn}(f)+1) = G(f)$

$\Rightarrow G(f) = \begin{cases} 2\cdot S(f) & f \geq 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$

③ $g_3(t) = 0$ wegen $H_H(f) \cdot H(f)$
$= H(f) \cdot H_H(f)$

④ $\int S(f) \cdot (-j \operatorname{sgn}(f) \cdot S(f)\, df$

$= \int s_1(t) \cdot s_2(t)\, dt$ Parseval

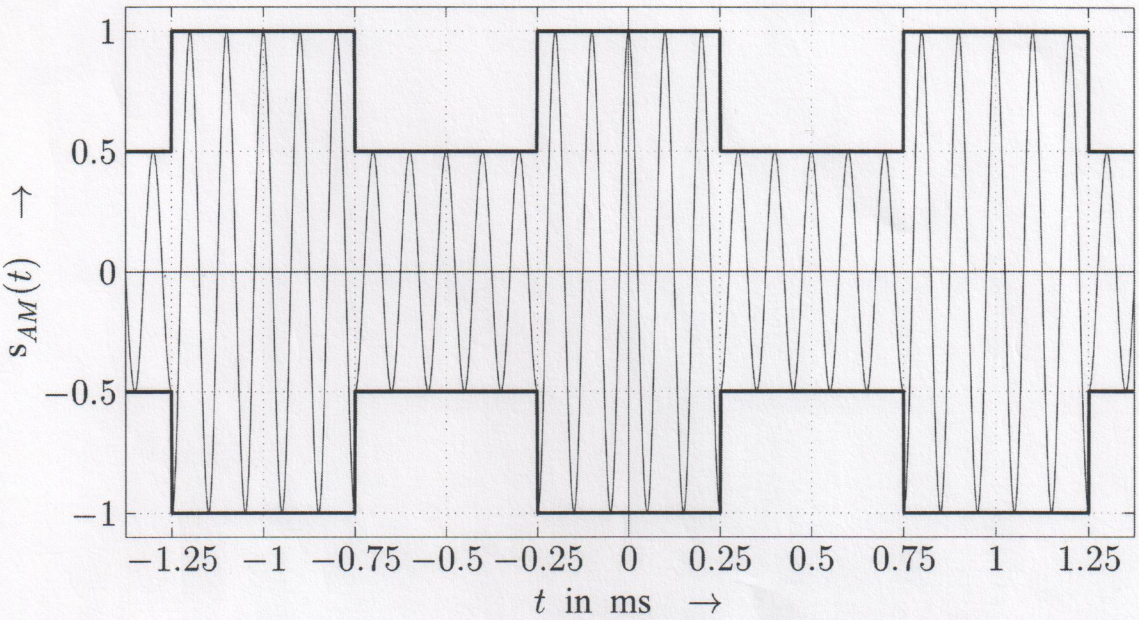
$\Rightarrow -j \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot \operatorname{sgn}(f) \cdot S(f)\, df = 0$

Signale sind orthogonal

$\Rightarrow \underline{g_4(t) = 0}$

Aufgabe 4.2 (8 Punkte)

Gegeben ist das dargestellte AM-Signal. Das Basisbandsignal enthält **keinen** Gleichanteil!



Bestimmen Sie den Modulationsgrad μ_{AM}, die Amplitude des unmodulierten Trägers A, die Trägerfrequenz f_T sowie die Frequenz der Rechteckschwingung f_0!

Aus Grafik: $f_{RF} = 10\,kHz$

$f_{Band} = 1\,kHz$

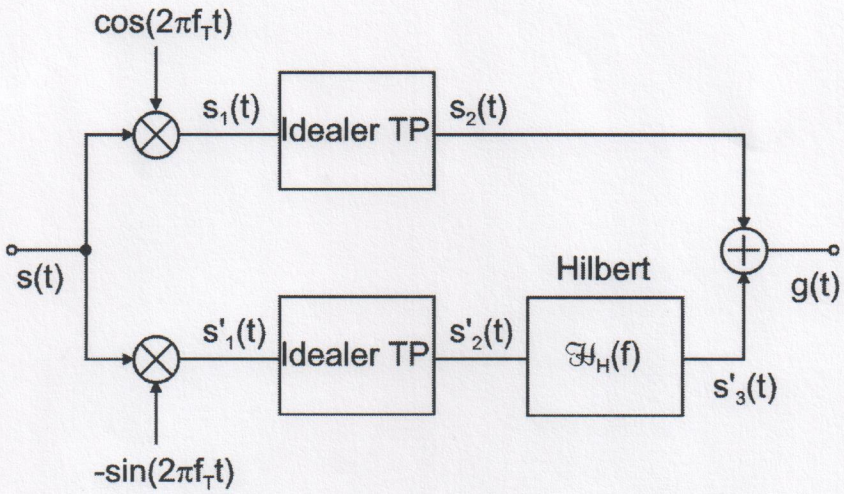
Amplitude des Trägers: $A = 0{,}75$ (Mittelwert aus 0,5 und 1,0)

" des Basisbandsignals: $0{,}25$

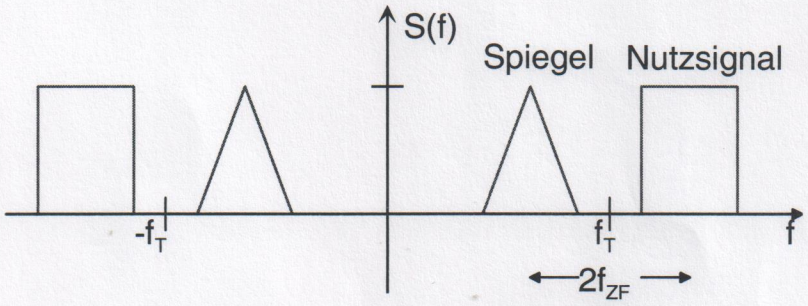
$\Rightarrow \mu_{AM} = \frac{0{,}25}{0{,}75} = \frac{1}{3}$

Aufgabe 4.3 (10 Punkte)

Die dargestellte Mischer-Struktur erlaubt die ideale Unterdrückung der Spiegelfrequenz (Image). Zeigen Sie dieses im Frequenzbereich, indem Sie die Spektren $S_1(f)$, $S_2(f)$, $S_1'(f),...,S_3'(f)$ sowie das resultierende Spektrum G(f) skizzieren. **Wählen Sie die Grenzfrequenzen der idealen Tiefpässe sinnvoll.**



Das Signal s(t) zeigt dabei das folgende Spektrum:



Siehe Übung